¿Cuántos sobres es necesario comprar para llenar el Álbum Panini del Mundial?

Para este problema se tendrán en cuenta dos supuestos evidentes (*i* y *iii*) y dos mas fuertes (*ii* y *iv*), lo que dejará a esta solución en estricta teoría por la falta de practicidad que estos supuestos representan.

Supuestos:

i) cada sobre tiene 5 estampas

ii) la distribución de las estampas es uniforme, es decir es igualmente probable que salga la 375 que la 571 o cualesquiera otras dos

iii) en un sobre pueden salir estampas repetidas (poco probable pero posible)

iv) exclusivamente para este modelo: no existe el intercambio de estampas, lo que lo hace poco práctico pero muy ilustrativo

Un álbum tiene 596 estampas (consideraremos la 597, “el timbre” al final). De esta forma consideremos que estamos llenando el album con una caja llena de estampas, en donde están las 596 estampas, cada una repetida infinitamente.

Como dice el sabio dicho latín: *“divide y vencerás”*, para lo que partiremos el problema de la siguiente forma:

Sin pérdida de generalidad (y para fines de mejor ilustración del problema y la solución) la primera estampa que saquemos irá en la casilla número uno, la segunda en la casilla número dos y así sucesivamente hasta la número 596.

Sea n_1 el número de estampas que necesitamos sacar de la caja para tener la primera estampa, n_2 la segunda y asi sucesivamente hasta tenerlas todas. Nótese que $n_1=1$ pues sea cual sea la primera estampa que saquemos no estará repetida, n_2 también es muy probable que sea 1 pues sería demasiada mala suerte que la segunda estampa que saquemos sea igual a la primera. De esta forma tenemos que n_i es número de estampas que necesitamos sacar de la caja para que nos sirva una que iría en la *i-ésima* casilla, por ejemplo:

procedimiento para sacar la estampa 16 (n_{16})

- 1: saco 1, ya la tengo, no me sirve
- 2: saco 1, ya la tengo, no me sirve
- 3: saco 1, ya la tengo, no me sirve
- 4: saco 1, **no** la tengo, **si me sirve**

De esta forma vemos que $n_{16}=4$, pues fue necesario sacar 4 estampas para que me sirviera una.

Esto, dicho de otra manera es el número de intentos necesarios para conseguir un éxito. Esto es justamente lo que modela una distribución geométrica, a la cual se le tiene que asociar el parámetro p, que indica la probabilidad de éxito, que en el caso de n_{16} , $p=\frac{596-15}{596}$, pues de las 596 posibles estampas, ya tengo 15 ($596-15$), entre todas las posibles (596), así $p_{16}=\frac{596-15}{596}$.

Ahora, para generalizarlo:

$$p_i=\frac{596-(i-1)}{596}=\frac{596-i+1}{596}$$

(nos referiremos más adelante a esta expresión como **expresión 1**)

De esta forma, definimos N como:

$$N=n_1+n_2+n_3+...+n_{595}+n_{596}$$

donde $n_i \sim geom(p_i)$ [esto se lee: n_i se distribuye geométricamente[1] con probabilidad p_i].

Modelado el problema de esta forma, estoy buscando cuál es el valor más probable de N , el cual probabilísticamente se conoce como esperanza, media o μ .

$$E[N]=E[n_1+n_2+n_3+...+n_{595}+n_{596}]$$

lo cual, por propiedades de la esperanza se puede escribir como:

$$E[N]=E[n_1]+E[n_2]+E[n_3]+...+E[n_{595}]+E[n_{596}]$$

Y aquí tenemos suerte, pues la esperanza de una distribución geométrica es conocida, de hecho es $\frac{1}{p}$, por lo que la suma anterior se puede escribir como:

$$E[N]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+...+\frac{1}{p_{595}}+\frac{1}{p_{596}}$$

$$E[N]=\sum_{i=1}^{596}\frac{1}{p_i}$$ (**expresión 2**)

en donde, por la , $p_i=\frac{596-i+1}{596}$, por lo que la queda de la siguiente forma:

1 para mejor referencia de la distribución geométrica: http://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_geometrica

$$\sum_{i=1}^{596} \frac{1}{\left(\frac{596-i+1}{596}\right)} = \sum_{i=1}^{596} \frac{596}{(597-i)} = 596 \times \sum_{i=1}^{596} \frac{1}{(597-i)}$$

Y usando cualquier computadora o calculadora, tenemos que

$$596 \cdot \sum_{i=1}^{596} \frac{1}{(597-i)} = 596 \times 6.9683 = 4153.1$$

Lo que significa que necesitamos comprar 4153.1 estampas en promedio para completar el álbum, lo que es 830.62 sobres. Es decir, necesitariamos 831 sobres para llenarlo, **en promedio y usando supuestos fuertes y teóricos** (i.e.: supuesto *iv*).

Ahora, agregando una estampa mas, el timbre, la cosa quedaría asi:

$$597 \cdot \sum_{i=1}^{597} \frac{1}{(598-i)} = 597 \times 6.9700 = 4161.1$$

las cuales equivalen a 833 sobres.